- زمان آزمون ۱۸۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.
- سوالات ۹ تا ۱۸ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

---

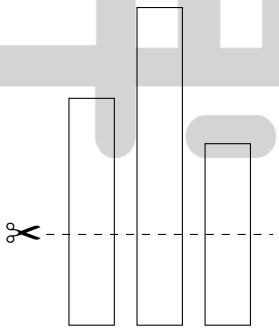
۱ آقای دایی از این که داور بازیکن تیم او را با نام اشتباهی خطاب کرده، ناراحت است و قصد دارد در نشست خبری بعد از بازی به این موضوع اعتراض کند. به همین منظور، او قالبی را برای متن خودش آماده کرده است که در این نشست آن را با انتخاب حروف الفبای مناسب ایراد خواهد کرد:

«محمدی» نامی کجای تیم من وجود داره؟
«عباس بوعذار» کجاش شبیه «محمدی» هست؟
از بین حروف «محمدی»، «عباس بوعذار» نه x داره نه y داره نه z داره!
فقط **یه دونه!** w داره، که اونم «محمدی» نداره!

آقای دایی می‌خواهد متغیرهای x، y، z و w را با حروف الفبای فارسی جایگزین کند. او چند متن سخن‌رانی صحیح متمایز می‌تواند ایجاد کند؟
توجه کنید که او حرف تکراری انتخاب نخواهد کرد!

۱) ۹۶ ۲) ۴۸۰ ۳) ۱۶۸ ۴) ۲۴۰۱ ۵) ۸۴۰

۲ پارسا در جگرکی آبولف استخدام شده و مسئول برش زدن جگرهاست. هر جگر در ابتدا به صورت یک نوار مستطیلی است که طول یک ضلع آن یک سانتی‌متر و طول ضلع دیگر عددی طبیعی (بر حسب سانتی‌متر) است. در هر عمل برش، پارسا می‌تواند تعدادی جگر را انتخاب کرده، آن‌ها را به صورت عمودی، از طرف ضلع یک سانتی‌متری در یک سطح قرار داده و با یک برش افقی، همگی را از ارتفاعی دل‌خواه برش بزند. برای مثال اگر سه جگر ۵ × ۱، ۷ × ۱ و ۴ × ۱ داشته باشیم، با برشی از ارتفاع ۲ سانتی‌متر، مطابق شکل زیر چهار تکه‌ی ۲ × ۱، یک تکه‌ی ۳ × ۱ و یک تکه‌ی ۵ × ۱ ساخته خواهد شد:



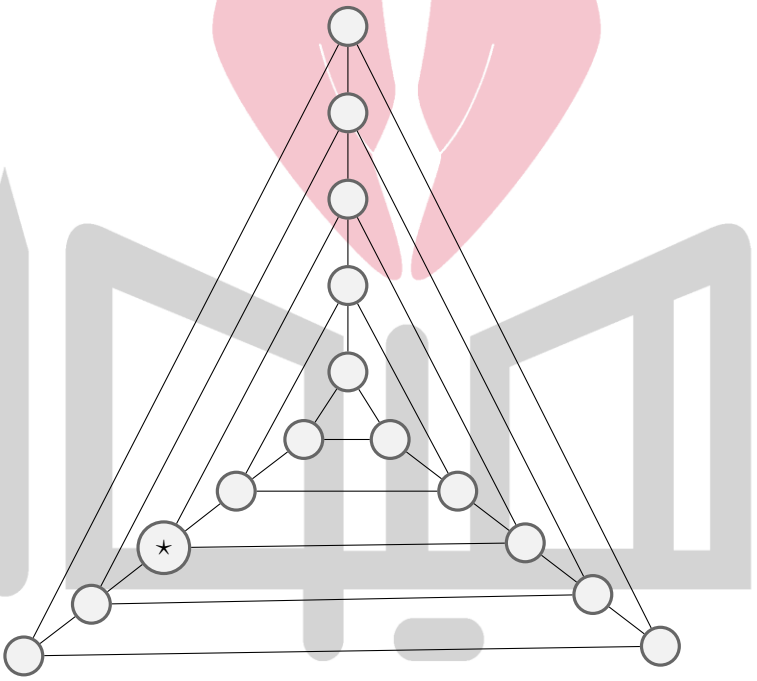
برش‌ها باید به نحوی باشند که اضلاع جگرها طبیعی باقی بمانند (بر حسب سانتی‌متر). مشتری‌های آبولف بسیار حساس هستند و دوست دارند جگرهای یک‌دست و هم‌اندازه‌ای تحویل بگیرند. فرض کنید پارسا در ابتدا پنج جگر با اندازه‌های ۹۱ × ۱، ۲۷۳ × ۱، ۴۲۹ × ۱، ۵۴۶ × ۱ و ۳۳۸ × ۱ داشته باشد. او حداقل به چند عمل برش نیاز دارد تا تمام تکه‌های جگر هم‌اندازه شوند (پارسا اجازه ندارد بخشی از جگرها را دور بریزد و باید همه‌ی آن‌ها را تحویل آشپز بدهد)؟

۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۱۰

۳ می‌خواهیم یک جدول ۸×۲ را با استفاده از ۵ رنگ طوری رنگ‌آمیزی کنیم که مجموعه‌ی رنگ‌های استفاده شده در سطر اول با مجموعه‌ی رنگ‌های استفاده شده در سطر دومش برابر باشد. هم‌چنین می‌خواهیم به ازای هر i (برای $۱ \leqslant i < ۸$)، مجموعه‌ی رنگ‌های استفاده شده در i ستون نخست با مجموعه‌ی رنگ‌های استفاده شده در $۸ - i$ ستون دیگر برابر باشد. به چند روش می‌توان جدول را با این شرایط رنگ کرد؟

۱) ۸۱۹۲۰ ۲) ۶۵۵۳۵ ۳) ۱۶۱۳۰۵ ۴) ۸۰۶۵۵ ۵) ۱۶۳۸۴۵

۴ مدتی است تبلیغات انتخاباتی در کشور مثلث شروع شده است؛ دکتر مسلط با شعار «آینده‌ی مثلث، نیازمند تسلط»، در انتخابات ثبت نام کرده است و ستاد انتخاباتی او در حال برنامه‌ریزی برای سفر تبلیغاتی شهری‌اش می‌باشند. کشور مثلث شامل ۱۵ شهر است که شکل زیر اتصالات میان این شهرها را نشان می‌دهد. دکتر مسلط در شهر $\star$ زندگی می‌کند. او که قرار است از فردا سفرش را شروع کند، در ابتدای هر روز به یکی از شهرهای مجاورش می‌رود و در آن‌جا سخنرانی می‌کند. ستاد انتخاباتی او می‌خواهد مسیر حرکتی دکتر مسلط را طوری انتخاب کند که او در هر شهر فقط یک‌بار سخنرانی کند و آخرین سخنرانی‌اش در شهر $\star$ باشد. چند مسیر متفاوت وجود دارد که این ستاد انتخاباتی می‌تواند انتخاب کند؟



۱) ۷۲ ۲) ۲۴ ۳) ۸۱ ۴) ۲۷ ۵) ۱۸

۵ باب اسفنجی و پاتریک تصمیم گرفتند که پس از مدت‌ها، از مغزشان استفاده کنند. به همین دلیل از اختاپوس خواستند که یک بازی فکری به آن‌ها معرفی کند. اختاپوس یک جدول و یک مهره‌ی اسب شطرنج به آن دو داد و گفت:
«بازی من بر روی یک جدول ۴×۴ سفید رنگ انجام می‌شود. یک مهره نیز در این بازی وجود دارد که در هر زمان، در یکی از ۱۶ خانه‌ی جدول قرار می‌گیرد. زیر این مهره به رنگ سیاه آغشته است و در نتیجه، در هر خانه‌ای که قرار بگیرد، رنگ آن خانه سیاه می‌شود.
باب اسفنجی! ابتدا یک خانه از جدول را انتخاب کن و مهره را در آن بگذار(رنگ آن خانه پس از این کار سیاه

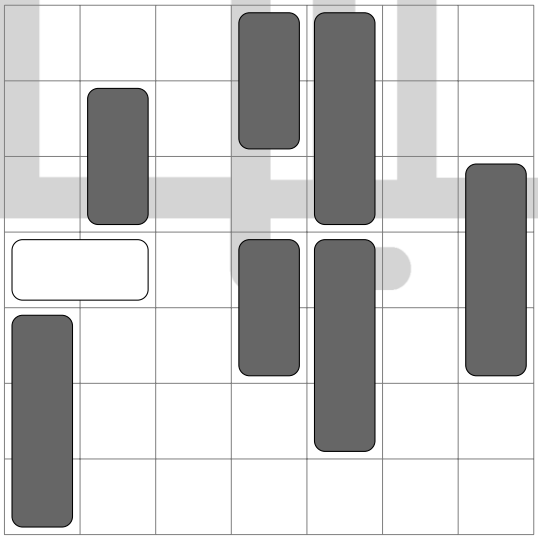
می‌شود). سپس بازی بین تو و پاتریک شروع می‌شود. پاتریک نفر اول است و پس از حرکت هر شخص، نوبت فرد دیگر می‌شود. هر کدام از شما در نوبت خود، حق دارید که مهره را مطابق حرکات اسب در شطرنج یک بار جابه‌جا کنید؛ اما تنها حق دارید مهره را به خانه‌ای سفید حرکت بدهید. رنگ خانه‌ی مقصد نیز پس از حرکت شما سیاه می‌شود. هر کس که نتواند مهره را حرکت دهد، بازی را می‌بازد.»
چند خانه از جدول هستند که اگر در ابتدای بازی، باب اسفنجی مهره را در یکی از آن‌ها قرار دهد، حتما می‌تواند پاتریک را شکست دهد؟
توضیح: حرکت مهره‌ی اسب در شطرنج به این صورت است که ابتدا دو خانه در جهت افقی یا عمودی جابه‌جا می‌شود و سپس ۹۰ درجه به چپ یا راست می‌پیچد و در نهایت یک خانه‌ی دیگر جلو می‌رود.

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۴ ۴) ۱۲ ۵) ۰

۶ اکبر آقا در هر یک از دو جیب شلوارش یک سکه‌ی ۲۰۰ تومانی و یک سکه‌ی ۵۰۰ تومانی دارد. او از هر کدام از جیب‌هایش یک سکه به صورت تصادفی درآورده و آن‌ها را پرتاپ می‌کند تا به احتمال برابر شیر یا خط بیایند. اگر بدانیم بین سکه‌های پرتاب شده سکه‌ی ۲۰۰ تومانی‌ای وجود دارد که شیر آمده باشد، چه‌قدر احتمال دارد که هر دو سکه شیر آمده باشند؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$ ۵) $\frac{۱}{۳}$

۷ یک پارکینگ به شکل یک جدول ۷ × ۷ در نظر بگیرید که ماشین‌هایی به عرض ۱ و طول ۲ یا ۳ در آن پارک شده‌اند. هر خانه از جدول توسط حداکثر یک ماشین می‌تواند اشغال شده باشد. مانند شکل زیر، یک ماشین سفید به طول دقیقا ۲ به صورت افقی در انتهای چپ سطر چهارم قرار دارد و چند ماشین خاکستری نیز به صورت عمودی پارک شده‌اند. ماشین سفید فقط راست، و ماشین‌های خاکستری بالا یا پایین می‌توانند بروند (در صورتی که خانه‌ی مقصد خالی باشد). چند حالت قرار دادن ماشین‌های خاکستری (به هر تعداد دل‌خواه) وجود دارد که بتوان با تعدادی حرکت، ماشین سفید را به انتهای راست سطر چهارم رساند؟ باقیمانده جواب را بر ۱۰ پیدا کنید.
در ضمن، ماشین‌های خاکستریِ هم‌طول هیچ تفاوتی با هم ندارند و نیز جلو و عقب ماشین‌ها هم با هم تفاوتی ندارد.



۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸ ۵) ۳

۸ بیماری کرونا به تازگی به شهر باب‌اسفنجی و دوستان رسیده است. آقای خرچنگ که صاحب یک رستوران است، حاضر نیست از درآمدش بگذرد و نمی‌خواهد رستورانش را تعطیل کند. اما سازمان بهداشت دریا به او این اجازه را

نداده است و رستورانش باید فقط به شکل بیرون‌بر فعالیت کند. رستوران آقای خرچنگ به شکل یک جدول ۷×۷ است و سه نفر در آن کار می‌کنند (آقای خرچنگ، اختاپوس و باب‌اسفنجی) که هر کدام در یک خانه‌ی متمایز از جدول قرار دارند. آقای خرچنگ که می‌ترسد یکی از کارکنان مریض شود و رستوران تعطیل گردد، می‌خواهد که کارکنان در ایمن‌ترین چینش ممکن رستوران کار کنند. مقدار ایمنی یک چینش مجموع فاصله‌ی **منهتنی** دوبه‌دوی کارکنان در آن چینش است. ایمن‌ترین چینش، بیشترین مقدار ممکن ایمنی را در بین تمام حالات چینش دارد. باب‌اسفنجی که عاشق چیدمان‌های جدید است، از شما می‌پرسد چند چینش ایمن‌ترین مختلف برای رستوران وجود دارد.

توضیح: فاصله‌ی منهتنی دو خانه، برابر است با مجموع قدر مطلق تفاضل طول‌ها و قدر مطلق تفاضل عرض‌های آن دو خانه.

۱) ۱۳۵۶ ۲) ۱۲۸۴ ۳) ۱۱۷۶ ۴) ۱۴۰۴ ۵) ۱۳۳۲

به تازگی امین وارد دنیای مین‌گذاری شده است. دنیای مین‌گذاری، یک بعدی و روی محور اعداد حقیقی است و هر مین، به صورت یک نقطه روی این محور قرار می‌گیرد. می‌دانیم که او در روز صفرم در دو نقطه‌ی ۰ و ۱ مین کاشته است. امین در هر روز، به ازای هر دو مین متوالی‌ای که در روزهای قبل در زمین کاشته است، به احتمال فاصله‌ی بین‌شان، مینی در میان‌شان می‌کارد. به بیانی دقیق‌تر، اگر a و b مکان کاشت دو مین متوالی در **انتهای** روز $i-۱$ ام باشند ($a < b$)، امین در روز i ام به احتمال $b-a$، در نقطه‌ی $\frac{a+b}{۲}$ مین می‌کارد. دقت کنید که مین‌هایی که امین در روزهای پیشین کاشته است از بین نمی‌روند و باقی می‌مانند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

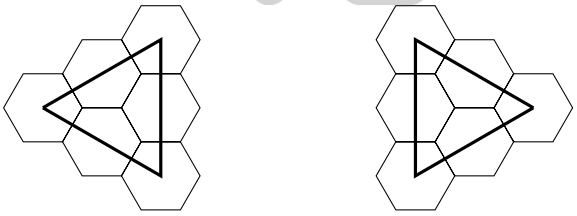
۹ امید ریاضی تعداد مین‌های کاشته شده از روز صفرم تا پایان روز ۱۲۸ام چه‌قدر است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۶۶ ۳) ۱۳۰ ۴) ۶۴ ۵) ۹

۱۰ پس از گذشت ۷ روز، به چه احتمالی در نقطه‌ی $(۰/۱۱۰۱۰۰)_۲$ مین کاشته شده است؟ دقت کنید که عدد داده شده در مبنای ۲ نوشته شده است.

۱) $\frac{۳۸۵}{۲۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱۵}$ ۳) $\frac{۱۶۱}{۲۲۰}$ ۴) $\frac{۱۲۹}{۲۲۰}$ ۵) $\frac{۳۲۱}{۲۲۷}$

در کهکشان نمکستان سفینه‌های فضایی شکل خاصی دارند و از ۶ عدد شش‌ضلعی منتظم تشکیل شده‌اند که شکل آن را در پایین مشاهده می‌کنید.



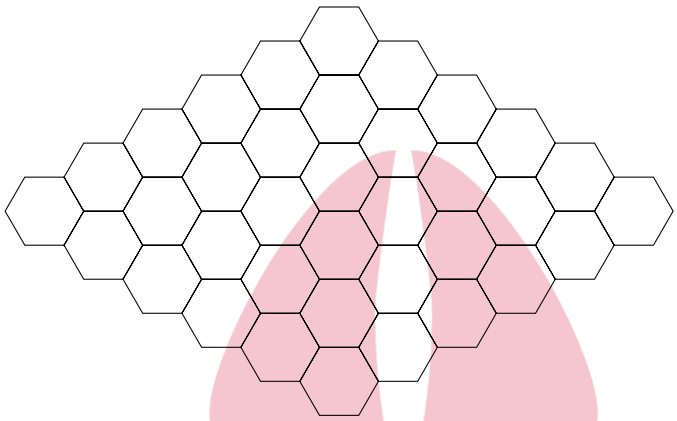
همچنین در نمکستان برای فرود این سفینه‌ها، به فرودگاه خاصی نیاز است که زمین آن از شش‌ضلعی های منتظم (با همان اندازه‌ی شش‌ضلعی‌های سفینه‌ها) تشکیل شده باشد. برای آن که یک سفینه بتواند در جایی از یک فرودگاه فرود بیاید، باید شش‌ضلعی‌های سفینه بر شش‌ضلعی‌های فرودگاه منطبق شود و همه‌ی شش‌ضلعی‌های فرودگاه که در زیر سفینه‌اند، سالم باشند.

«نمکیه» و «شکریه» دو سیاره در نمکستان هستند که به تازگی وارد جنگ با هم شده‌اند. نیروی هوایی سیاره‌ی

نمکیه با یک موشک نقطه‌زن می‌تواند یکی از شش‌ضلعی‌های فرودگاه سیاره‌ی شکریه را منهدم کند. هدف نیروی هوایی سیاره‌ی نمکیه این است که هیچ سفینه‌ای نتواند در فرودگاه فرود بیاید.

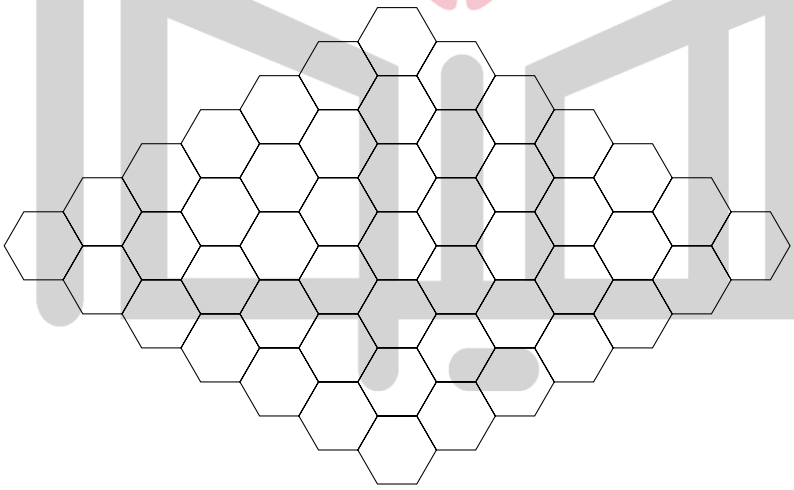
با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۱ اگر تصویر زیر نشان‌دهنده‌ی فرودگاه سیاره‌ی شکریه باشد، نیروی هوایی نمکیه حداقل به چند موشک نیاز دارد؟



۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۷ ۵) ۵

۱۲ در یک عملیات ضربتی، نیروهای خدمت‌گزار سیاره‌ی شکریه از یک فرودگاه جدید و بزرگ‌تر مطابق شکل زیر پرده‌برداری کرده‌اند. مشابه سؤال قبلی، نیروی هوایی نمکیه حداقل به چند موشک نیاز دارد؟



۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۸ ۵) ۷

الگوریتم زیر که Zip نام دارد، رشته‌ای دودویی (از ارقام ۰ و ۱) را به عنوان ورودی می‌گیرد و به صورت زیر اجرا می‌شود:

۱. S را مجموعه‌ای تهی در نظر بگیر و ورودی را در z بریز.
۲. اگر z یک‌رقمی است یا $z \in S$، آن را برگردان و به پایان برس.

۳. z را به S اضافه کن.
۴. دو رقم سمت راست z را در نظر بگیر؛ اگر این دو رقم برابر باشند، رقم سمت راست z را حذف کن؛ در غیر این صورت، رقم سمت راست z را حذف کن و آن را به سمت چپ z اضافه کن.
۵. به مرحله‌ی ۲ بازگرد.

برای مثال، اگر رشته‌ی ۱۱۱۰ را به عنوان ورودی به این الگوریتم بدهیم، مقدار z به این صورت تغییر می‌کند:

$$۱۱۱۰ \to ۰۱۱۱ \to ۰۱۱ \to ۰۱ \to ۱۰ \to ۰۱$$

و در نتیجه، مقدار $Zip(۱۱۱۰)$ برابر با ۰۱ می‌شود. دقت کنید که رقم سمت چپ رشته‌ی z می‌تواند صفر باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۳ به ازای همه‌ی رشته‌های دودویی یازده رقمی ممکن، این الگوریتم چند خروجی متفاوت را برمی‌گرداند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۲۲ ۴) ۵ ۵) ۲

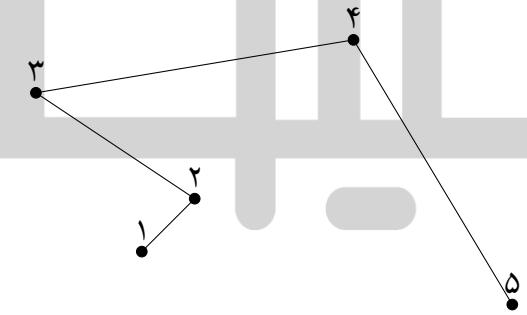
۱۴ بزرگ‌ترین مجموعه از رشته‌های دودویی یازده رقمی متمایز که خروجی الگوریتم برای همه‌ی اعضایش یکسان باشد، چه اندازه‌ای دارد؟

۱) ۳۳۰ ۲) ۲۵۲ ۳) ۵۰۴ ۴) ۹۲۴ ۵) ۴۶۲

فرض کنید n نقطه‌ی متمایز در صفحه داریم. عملیات **شکسته‌بندی** به صورت زیر انجام می‌شود:

ابتدا نقاط با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری می‌شوند. سپس خطی شکسته کشیده می‌شود که به ازای هر i (برای $۱ \leqslant i \leqslant n-۱$)، نقطه‌ی شماره‌ی i را به نقطه‌ی شماره‌ی $i+۱$ متصل می‌کند.

برای مثال در شکل زیر، یک عملیات شکسته‌بندی روی پنج نقطه انجام شده است:



دو شکسته‌بندی متمایز هستند، اگر و تنها اگر شماره‌گذاری‌های متفاوتی داشته باشند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۵ ۹ نقطه‌ی متمایز در صفحه داریم که همگی روی یک دایره قرار دارند. به چند طریق می‌توان عملیات شکسته‌بندی را روی این نقاط انجام داد، طوری که خط شکسته‌ی ایجاد شده خودش را قطع نکند؟

۱) بسته به چینش نقاط، پاسخ متفاوت است. ۲) ۲۳۰۴ ۳) ۱۱۵۲ ۴) ۲۵۶ ۵) ۵۱۲

۱۶ ۹ نقطه در صفحه داریم که هیچ سه‌تا از آن‌ها هم‌خط نیستند. هم‌چنین، هیچ چهار نقطه‌ی متمایز A، B، C، و D از آن‌ها را نمی‌توان یافت که پاره‌خط‌های AB و CD موازی باشند. فرض کنید برای عملیات شکسته‌بندی، نقاط را به روش زیر شماره‌گذاری کنیم:

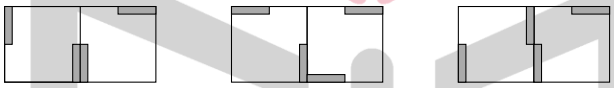
> ابتدا یک محور مختصات دو بُعدی را در جهتی (زاویه‌ای) دل‌خواه تعیین می‌کنیم، با این شرط که مقدار طول (x) هیچ دو نقطه‌ای برابر نباشد. سپس نقاط را طوری شماره‌گذاری می‌کنیم که هر نقطه‌ی با طول (x) بیش‌تر، شماره‌ی بیش‌تری داشته باشد.

با این روش، چند شکسته‌بندی متمایز می‌توان انجام داد؟

۱) ۷۲ ۲) ۳۶ ۳) ۹۰ ۴) ۱۸ ۵) بسته به چینش نقاط، پاسخ متفاوت است.

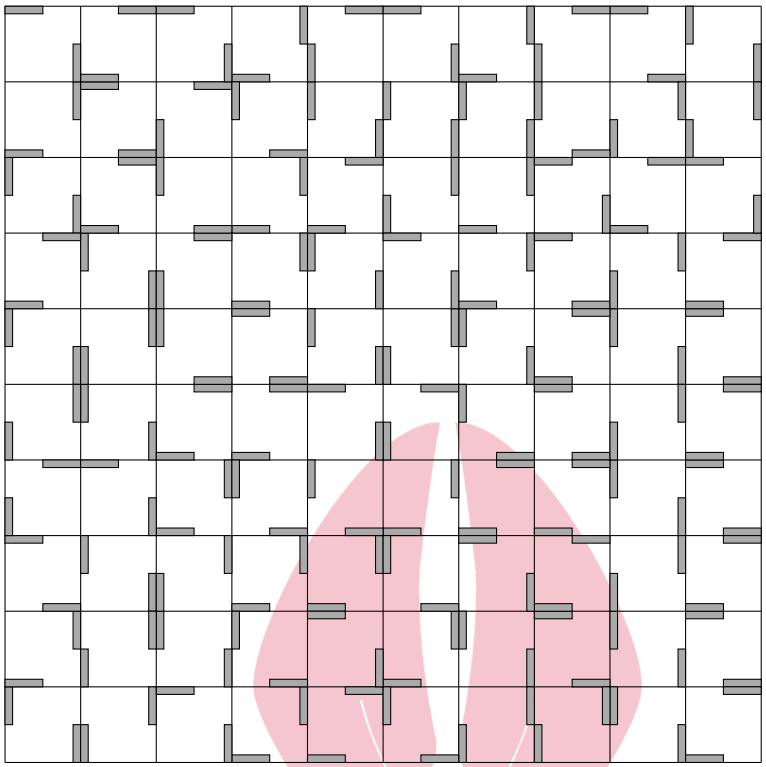
کاخ آبولف به شکل جدولی ۱۰×۱۰ است. در هر خانه از این جدول، دو دریچه وجود دارد که بر دو گوشه‌ی مقابل از آن خانه نصب شده‌اند. هر دریچه می‌تواند با چرخش ۹۰ درجه‌ای (حول گوشه‌ای که بر آن نصب شده)، از حالت افقی به عمودی یا برعکس، تغییر وضعیت بدهد. برای مثال در شکل زیر، با چرخش دریچه‌ای که به گوشه‌ی بالا چپ خانه‌ی جدول متصل است، می‌توانیم از وضعیت سمت چپ به وضعیت سمت راست برسیم:

در صورتی که دو خانه‌ی مجاور (دارای ضلع مشترک) دو دریچه‌ی کاملا به هم چسبیده (و با نصب در گوشه‌ی یکسان) داشته باشند، یک فرد می‌تواند از یکی از این خانه‌ها به دیگری برود. برای مثال در شکل زیر، در حالت سمت چپ امکان جابه‌جایی بین دو خانه وجود دارد، اما در دو حالت دیگر خیر:



با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۷ در شکل زیر، آبولف در خانه‌ی پایین چپ جدول قرار دارد و می‌خواهد به خانه‌ی بالا راست برود. او هر زمان که بخواهد، می‌تواند یکی از دریچه‌های یکی از خانه‌ها را انتخاب کند و به مأمور آن دریچه دستور دهد که آن را بچرخاند (لزومی ندارد دریچه‌ی انتخاب شده در خانه‌ی فعلی آبولف باشد). آبولف حداقل چند دستور باید بدهد تا بتواند به مقصد برسد؟



۱) ۱۹ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۱۷ ۵) ۲۰

۱۸ در بازسازی کاخ، آبولف می‌خواهد تمام دریچه‌ها را بردارد و برای خانه‌ها از نو دریچه بگذارد (هم‌چنان برای هر خانه، باید دو دریچه در دو گوشه‌ی مقابل، هر یک به صورت افقی یا عمودی، قرار داده شود). او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد، طوری که از هر خانه بتوان با تعدادی گام به هر خانه‌ی دیگر رسید (می‌توان دریچه‌ها را حین پیمودن مسیر هم چرخاند)؟

۱) $۲^{۲۰۱}$ ۲) $۲^{۱۰۱}$ ۳) $۲^{۲۰۰}$ ۴) $۲^{۳۰۰}$ ۵) ۳×۲^{۳۰۰}

کلید آزمون مرحله دوم بیست و چهارمین المپیاد کامپیوتر

سوال ۱) ۱ و ۳ (هر دو گزینه پذیرفته می‌شود)

سوال ۲) ۴

سوال ۳) ۳

سوال ۴) حذف

سوال ۵) ۵

سوال ۶) ۳

سوال ۷) ۱

سوال ۸) ۲

سوال ۹) ۳

سوال ۱۰) حذف

سوال ۱۱) ۲

سوال ۱۲) ۴

سوال ۱۳) ۲

سوال ۱۴) ۵

سوال ۱۵) ۳

سوال ۱۶) ۱

سوال ۱۷) ۳

سوال ۱۸) ۱